



Universidade Federal da Paraíba
Centro de Tecnologia
Departamento de Engenharia Mecânica

Estudo Numérico da Transferência de Calor
Transiente em Varetas Combustíveis

Thiago Ney Evaristo Rodrigues
Orientador: Dr. Jacques Cesar dos Santos

João Pessoa, PB
Novembro de 2023

Thiago Ney Evaristo Rodrigues

**Estudo Numérico da Transferência de Calor
Transiente em Varetas Combustíveis**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à banca examinadora como parte das exigências à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Dr. Jacques Cesar dos Santos

João Pessoa, PB
Novembro de 2023

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

R696e Rodrigues, Thiago Ney Evaristo.

Estudo Numérico da Transferência de Calor Transiente
em Varetas Combustíveis / Thiago Ney Evaristo

Rodrigues. - João Pessoa, 2023.

64 f. : il.

Orientação: Jacques Cesar dos Santos.

TCC (Graduação) - UFPB / Tecnologia.

1. Combustível Nuclear. 2. Método Numérico das
Linhas. 3. Refino de Malha. 4. Simulação Numérica. 5.

Transferência de Calor. I. Santos, Jacques Cesar dos.

II. Título.

UFPB/CT/BSCT

CDU 621 (043.2)

Estudo Numérico da Transferência de Calor Transiente em Varetas Combustíveis

por

Thiago Ney Evaristo Rodrigues

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Programa de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Área de Concentração: Termofluidos

Aprovada em 01 de Novembro de 2023

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Jacques Cesar dos Santos – UFPB
(Orientador)



Prof. Dr. Carlos Antônio Cabral dos Santos – UFPB
(Examinador Interno)



Prof. Dr. Koje Daniel Vasconcelos Mishina – UFPB
(Examinador Interno)

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida.

À minha mãe e minha família, incluindo avós, tios, tias e primos, por estarem sempre ao meu lado, oferecendo apoio incondicional, não importando as circunstâncias.

À minha querida namorada, Gisélia, e sua família, pelo carinho que enriquecem meu dia a dia.

Aos amigos que o curso me proporcionou: Bárbara, Bento, Cezar, Darlysson, Filipe, Israel, Janyne, João, Leonardo, Micael, Neto, Oton e Sofia, que me trouxeram alegria e foram companheiros durante a desafiadora jornada da engenharia.

Ao meu amigo de infância, Marcos, por ser um excelente conselheiro, além de um exemplo notável tanto como pessoa quanto como profissional.

Aos amigos da empresa, Acumuladores Moura, Alana, Jéssica, Mariana e Victor, que constantemente me incentivaram durante o desenvolvimento desse trabalho.

Ao professor Dr. Gustavo Oliveira, por oferecer oportunidades e valiosos ensinamentos ao longo dos últimos anos da minha formação.

Ao corpo docente e administrativo do Departamento de Engenharia Mecânica, pelo conhecimento transmitido e pelo atendimento prestado, vocês fazem parte da minha formação e de todos os engenheiros mecânicos da UFPB.

À banca, composta pelos professores Dr. Carlos Cabral e Dr. Koje Mishina, por aceitarem o convite, pela disponibilidade e atenção.

Ao professor Dr. Jacques Cesar, por suas orientações, suporte e ensinamentos ao longo deste trabalho.

Minha gratidão a todos vocês, que contribuíram de maneira significativa para minha jornada pessoal e profissional.

"Apenas se lembre, não será para você... será para eles."

Robert Oppenheimer

Resumo

O presente trabalho realizou um estudo numérico do problema clássico da transferência de calor unidimensional em coordenadas cilíndricas, considerando a aplicação em varetas combustíveis de reatores nucleares, por meio de uma abordagem numérica focada na equação de calor. Foi utilizado o método numérico das linhas (NUMOL) com discretização por diferenças finitas. Ao longo do estudo foram realizadas simulações de convergência da malha, buscando compreender a estabilidade da solução ao se realizar um refinamento das malhas temporal e espacial. Além disso, foram conduzidas simulações abrangentes para diferentes cenários de geração de calor, considerando variações em variáveis fundamentais do fenômeno físico. Esse enfoque permitiu uma compreensão do comportamento da transferência de calor, considerando a condução interna e a convecção na superfície das varetas de combustível. A validação dessas simulações foi realizada comparando os resultados obtidos com a literatura, evidenciando a convergência dos resultados e a robustez da abordagem numérica. Por fim, o estudo não apenas forneceu uma ferramenta valiosa para o aprofundamento de conceitos de transferência de calor, mas também ofereceu ideias com importância ímpar sobre o funcionamento dos reatores nucleares. Este último aspecto é de grande importância no cenário mundial atual, marcado pelo aumento populacional, desenvolvimento tecnológico acelerado, a crescente ênfase na sustentabilidade e a necessidade de diversificação da matriz energética global. A aplicação de métodos numéricos para solucionar desafios nesse contexto específico destacou-se como uma abordagem eficaz e relevante.

Palavras-chaves: Combustível Nuclear. Método Numérico das Linhas. Refino de Malha. Simulação Numérica. Transferência de Calor.

Abstract

The present work conducted a numerical study of the classic problem of one-dimensional heat transfer in cylindrical coordinates, considering its application to fuel rods in nuclear reactors. The study employed a numerical approach focused on the heat equation, utilizing the method of lines (NUMOL) with finite difference discretization. Throughout the investigation, mesh convergence simulations were performed to comprehend the solution's stability when refining temporal and spatial meshes. Moreover, comprehensive simulations were carried out for various heat generation scenarios, incorporating variations in fundamental variables of the physical phenomenon. This approach facilitated an understanding of heat transfer behavior, accounting for internal conduction and surface convection of the fuel rods. The validation of these simulations involved comparing the obtained results with existing literature, highlighting the convergence and robustness of the numerical approach. In conclusion, this study not only provided a valuable tool for a deeper understanding of heat transfer concepts but also offered unparalleled insights into the operation of nuclear reactors. The latter aspect holds significant importance in the current global scenario characterized by population growth, accelerated technological development, a growing emphasis on sustainability, and the need for diversification of the global energy matrix. The application of numerical methods to address challenges in this specific context emerged as an effective and relevant approach.

Keywords: Heat Transfer. Mesh Refinement. Method of Lines Numerical. Nuclear Fuel. Numerical Simulation.

Lista de Figuras

2.1	Estrutura de um elemento de combustível nuclear.	18
2.2	Ilustração representativa da origem do método numérico das linhas.	23
3.1	Representação da vareta de combustível nuclear, com o revestimento e a região de gap.	26
3.2	Representação simplificada da vareta de combustível nuclear.	27
4.1	Perfis de temperatura para primeira forma de geração de calor: (a) perspectiva isométrica; (b) vista superior.	35
4.2	Comparativo de resultados com a literatura para primeira forma de geração de calor.	36
4.3	Perfis de temperatura para segunda forma de geração de calor: (a) perspectiva isométrica; (b) vista superior.	37
4.4	Comparativo de resultados com a literatura para segunda forma de geração de calor.	38
4.5	Perfis de temperatura para terceira forma de geração de calor: (a) perspectiva isométrica; (b) vista superior.	39
4.6	Comparativo de resultados com a literatura para terceira forma de geração de calor.	40
4.7	Influência nos perfis de temperatura devido a variação no coeficiente c_1 da terceira forma de geração de calor.	41
4.8	Influência nos perfis de temperatura devido a variação no número de Bi na terceira forma de geração de calor.	42
4.9	Perfis de temperatura para quarta forma de geração de calor: (a) perspectiva isométrica; (b) vista superior.	43
4.10	Comparativo de resultados com a literatura para quarta forma de geração de calor.	44

4.11 Influência nos perfis de temperatura devido a variação no número de Bi na quarta forma de geração de calor.	45
---	----

Lista de Tabelas

4.1	Erro numérico no refino da malha temporal.	33
4.2	Erro numérico no refino da malha espacial.	34

Lista de Símbolos

A	-	Área da seção transversal, m^2
Bi	-	Biot
c_p	-	Calor específico a pressão constante, $J/Kg.K$
h	-	Coefficiente de transferência de calor por convecção, $W/(m^2)$
k	-	Condutividade térmica de um material, $W/(m \cdot K)$
α	-	Difusividade térmica, m^2/s
q	-	Quantidade de calor, J
ρ	-	Massa específica de um material, kg/m
r'	-	Raio variável, m
r	-	Raio variável adimensional, m
R_V	-	Raio da vareta combustível, m
R_{RE}	-	Raio externo do revestimento, m
R_{RI}	-	Raio interno do revestimento, m
q''	-	Taxa de transferência de calor, J/m^2
\dot{q}	-	Taxa de geração de energia, W/m^3
T	-	Temperatura, K
θ	-	Temperatura adimensional
T_s	-	Temperatura da superfície do material, K
T_∞	-	Temperatura do ambiente, K
t'	-	Tempo variável, s
t	-	Tempo variável adimensional, s
g	-	Termo fonte de calor, W/m^3
G	-	Termo fonte de calor em função do tempo e espaço, W/m^3
G^*	-	Termo fonte de calor adimensional

Conteúdo

1	Introdução	13
1.1	Motivação	14
1.2	Objetivos	15
1.2.1	Objetivo Geral	15
1.2.2	Objetivos Específicos	15
1.3	Estrutura do Trabalho	15
2	Fundamentação Teórica	17
2.1	Reatores Nucleares	17
2.2	Transferência de Calor	19
2.2.1	Condução	20
2.2.2	Convecção	20
2.3	Equações Diferenciais	21
2.3.1	Método Numérico das Linhas	22
2.3.2	Discretização por Diferenças Finitas	23
3	Metodologia	25
3.1	Modelagem Matemática	25
3.2	Discretização Numérica	29
3.2.1	Condições de Contorno	30
3.3	Solução do Sistema de Equações Diferenciais	31
4	Resultados e Discussão	32
4.1	Refinamento de Malha	32
4.1.1	Malha Temporal	32
4.1.2	Malha Espacial	33
4.2	Perfis de Transferência de Calor	34
4.2.1	Primeira Forma de Geração de Calor	35

4.2.2	Segunda Forma de Geração de Calor	36
4.2.3	Terceira Forma de Geração de Calor	38
4.2.4	Quarta Forma de Geração de Calor	42
5	Conclusões	46
	Referências Bibliográficas	47
A	Códigos em MATLAB	49
A.1	Convergência da Malha Temporal	49
A.2	Convergência da Malha Espacial	51
A.3	Primeira Forma de Geração de Calor	53
A.4	Segunda Forma de Geração de Calor	55
A.5	Terceira Forma de Geração de Calor	58
A.6	Quarta Forma de Geração de Calor	60

Capítulo 1

Introdução

O consumo energético global é um tema de importância crítica na atualidade, marcada por uma crescente demanda por energia impulsionada pelo crescimento populacional, industrialização e avanços tecnológicos. A geração, o consumo e a distribuição de energia desempenham um papel fundamental em questões que vão desde a economia global e segurança energética até o meio ambiente e as mudanças climáticas.

Neste contexto, o consumo energético se apresenta como um desafio complexo e, ao mesmo tempo, uma oportunidade essencial para o desenvolvimento da nossa sociedade globalizada. À medida que o mundo continua a evoluir, várias questões interconectadas emergem como pilares fundamentais no debate sobre energia.

No que diz respeito às projeções de consumo energético, o crescimento populacional em constante ascensão, a urbanização acelerada e os avanços tecnológicos prenunciam um aumento substancial na demanda por energia nas próximas décadas. Segundo a ExxonMobil (2023), estima-se um crescimento expressivo de aproximadamente 15% até 2050 em relação aos níveis de 2021. Esta crescente demanda exerce uma pressão considerável sobre os sistemas de energia em escala global, fomentando a busca incessante por fontes de energia mais eficientes e sustentáveis.

A matriz energética assume papel central nesse cenário. Grandes potências mundiais, como a China, os Estados Unidos e a Índia, possuem matrizes diversificadas e estão no centro das discussões sobre como equilibrar o suprimento de energia com a responsabilidade ambiental. O Brasil, por sua vez, destaca-se com uma matriz energética altamente limpa, impulsionada em grande parte pela energia hidrelétrica, com uma fatia significativa de 56,8% da energia elétrica produzida no Brasil, segundo Pesquisa Energética (2022).

Em meio as discussões está a polêmica questão das usinas nucleares. Elas oferecem

vantagens expressivas, como a alta eficiência na geração de energia e a baixa emissão de gases de efeito estufa. No entanto, é repleta por desafios de segurança, históricos de acidentes impactantes, como Chernobyl e Fukushima, e preocupações com o armazenamento seguro de resíduos nucleares.

O projeto de energia nuclear é complexo e enfrenta desafios significativos. Isso envolve compreender profundamente a física nuclear, projetar reatores seguros, gerenciar resíduos altamente radioativos, selecionar materiais resistentes à radiação, assegurar segurança operacional, cumprir regulamentações rigorosas, conduzir pesquisas contínuas e gerenciar um ciclo de vida longo. Essa complexidade exige conhecimento multidisciplinar e um compromisso de longo prazo com a segurança e a inovação tecnológica.

Destacamos especialmente a importância do estudo da transferência de calor em combustíveis nucleares. Essa pesquisa é essencial para o projeto seguro de usinas nucleares, monitoramento de níveis de calor toleráveis e prevenção de acidentes graves. Uma compreensão profunda desse aspecto contribui diretamente para a segurança e eficiência dessas instalações críticas.

1.1 Motivação

A motivação para realizar o presente estudo, simulação numérica de um problema clássico de transferência de calor, reside no interesse de compreender e analisar, de maneira detalhada e precisa, o comportamento térmico de sistemas. Problemas de transferência de calor são universais em diversas áreas, desde os processos industriais até os dispositivos eletrônicos. A abordagem numérica se torna essencial quando lidamos com geometrias complexas, condições de contorno variadas e/ou interações térmicas não triviais, para as quais as soluções analíticas podem ser inviáveis.

Ao empregar métodos numéricos podemos modelar sistemas levando em consideração não apenas a condução de calor, mas também fenômenos mais complexos, como a convecção e a radiação térmica. Essas simulações numéricas proporcionam ideias valiosas sobre os padrões de temperatura, distribuição de calor e eficiência térmica do sistema em estudo.

Por fim, a aplicação dos reatores nucleares se justifica como uma fonte potente e eficiente de eletricidade, apresentando o potencial de atender à crescente demanda global de energia de maneira sustentável. Além disso, a pesquisa nesse campo contribui significativamente para o avanço científico, proporcionando insights profundos sobre a física nuclear e os processos termonucleares. Vale ressaltar que a utilidade dos reatores não se

limita à geração de eletricidade, expandindo-se para a produção de isótopos destinados a aplicações médicas, o desenvolvimento contínuo de tecnologias nucleares inovadoras e a contribuição para a redução das emissões de gases de efeito estufa. Dessa forma, a abordagem abrangente dos reatores nucleares destaca sua importância em diversas áreas.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo apresentar um estudo numérico sobre a transferência de calor em varetas de combustível nuclear, enfocando os aspectos transitórios desse processo, com ênfase nos mecanismos de condução e convecção, além de considerar a geração interna de calor, inerente ao funcionamento do combustível nuclear.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Aplicação do Método Numérico das Linhas (NUMOL);
- Estudo de convergência de malha;
- Simulação de diferentes fontes de calor;
- Análise da influência da variação de termos que modelam o fenômeno;
- Comparação dos resultados com a literatura.

1.3 Estrutura do Trabalho

No capítulo 1, fornecemos uma contextualização do tema abordado neste trabalho, discutindo o consumo de energia no contexto contemporâneo, a composição da matriz energética global e a relevância da energia nuclear. Além disso, apresentamos os objetivos do estudo e concluimos esta seção com uma descrição da estrutura do texto que se segue.

No capítulo 2, abordamos a teoria por trás do funcionamento de reatores nucleares, bem como os mecanismos envolvidos na modelagem e resolução de problemas de transferência de calor. É importante ressaltar que esses tópicos são apresentados de maneira introdutória, com o propósito de revisar conceitos essenciais para os capítulos

subsequentes. Portanto, uma análise mais detalhada desses temas está além do escopo deste trabalho.

No capítulo 3, aplicamos os conceitos abordados no capítulo 2. Iniciamos com a modelagem matemática do objeto de estudo, seguida pela discretização numérica do problema, utilizando os métodos NUMOL e Diferenças Finitas. Finalizamos este capítulo com uma visão geral sobre a resolução de sistemas de equações diferenciais, com ênfase no solver utilizado, o ode15s.

No capítulo 4, apresentamos e discutimos os resultados obtidos. Nesta seção, exploramos estudos que analisam a convergência do refinamento das malhas numéricas no problema em questão, fazemos comparações com resultados da literatura e fornecemos uma interpretação desses resultados no contexto da transferência de calor em reatores nucleares.

No capítulo 5, concluímos este trabalho com uma visão geral, destacando as principais conclusões alcançadas durante o estudo. Além disso, discutimos a relevância do tema abordado.

Capítulo 2

Fundamentação Teórica

2.1 Reatores Nucleares

Reatores nucleares são sistemas complexos que operam com base nos princípios da fissão nuclear, que envolvem a divisão controlada de núcleos atômicos pesados, como o urânio, liberando uma considerável quantidade de energia na forma de calor. Essa energia térmica é posteriormente convertida em eletricidade ou utilizada em diversas aplicações industriais e científicas. Os reatores nucleares possuem uma ampla gama de aplicações, sendo a geração de eletricidade a mais conhecida e relevante, mas também desempenham papéis essenciais na propulsão nuclear de submarinos e navios, na produção de isótopos médicos para diagnóstico e tratamento, e na pesquisa científica.

No entanto, os reatores nucleares apresentam riscos significativos, principalmente relacionados à segurança e à gestão de resíduos radioativos. De acordo com Hirsch et al. (2005), um grande acidente em um reator de água "leve" pode resultar na liberação de uma quantidade de radioatividade centenas de vezes maior do que a liberada em Chernobyl, além de exigir a evacuação de uma grande área (até 100.000 km²) e potencialmente resultar em mais de um milhão de casos de câncer.

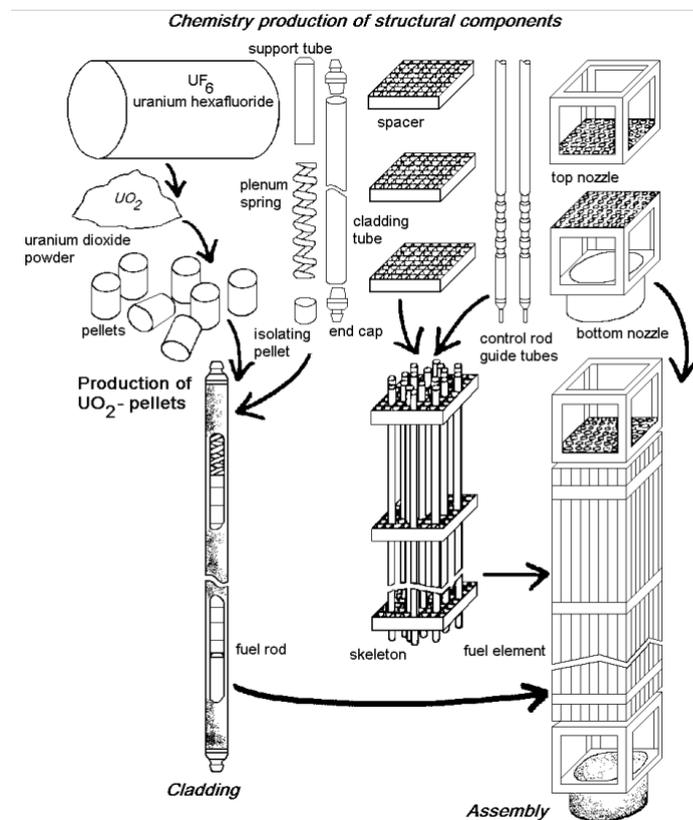
Existem diversos tipos de reatores nucleares com designs e modos de operação variados, sendo os reatores de água pressurizada (PWR), os reatores de água fervente (BWR) e os reatores de água supercrítica (SCWR) exemplos comuns e, estes, constituintes da família de reatores de água leve (LWR), (Salomé, 2016). Cada tipo possui características distintas relacionadas a moderadores e sistemas de refrigeração.

Os materiais químicos utilizados nos reatores nucleares são de extrema importância para garantir segurança e eficiência. O combustível mais comum é o urânio-238, embora reatores também possam fazer uso de materiais como plutônio e tório, entre outros.

A física que governa os reatores nucleares é complexa, envolvendo conceitos de fissão nuclear, reações em cadeia, fluxo de nêutrons e transferência de calor. Diversos mecanismos e fenômenos ocorrem em reatores nucleares, incluindo a absorção de nêutrons, liberação de energia, fluxo de calor e produção de subprodutos radioativos. A estrutura de um reator nuclear é projetada para conter a fissão nuclear e fornecer refrigeração eficaz.

O funcionamento básico de um reator envolve a fissão do elemento combustível, apresentado na Figura 2.1, resultando na liberação de uma grande quantidade de energia térmica, que é absorvida por um refrigerante. Esse refrigerante aquecido transporta a energia térmica para um gerador de vapor e circuito secundário, nos casos de reatores que utilizam o ciclo Rankine, conforme mencionado por (Rezende e Bortotti, 2019) e (Glasstone e Sesonske, 1994).

Figura 2.1: Estrutura de um elemento de combustível nuclear.



Fonte: Perrotta, 1999.

A operação de reatores nucleares é altamente regulamentada e requer rigoroso controle de segurança, uma vez que acidentes podem resultar em vazamentos de materiais

radioativos. A gestão de resíduos nucleares é um desafio crítico, uma vez que os subprodutos da fissão nuclear são radioativos e exigem armazenamento seguro a longo prazo.

2.2 Transferência de Calor

A transferência de calor é a área que estuda como a energia se move entre diferentes corpos ou sistemas. Esse processo ocorre devido à gradientes de temperatura, com a energia sendo transferida do corpo mais quente para o mais frio. O seu estudo possui um papel fundamental no projeto e na otimização de sistemas e dispositivos. O conhecimento do movimento do calor é essencial para garantir a eficiência energética, a segurança e o desempenho adequado em diversas aplicações.

A transferência de calor ocorre por meio de três principais mecanismos: condução, convecção e radiação. A condução é a transferência de energia das partículas mais energéticas de uma substância para partículas vizinhas adjacentes menos energéticas, como resultado da interação entre elas, (Çengel, 2010). Por outro lado, a convecção é o modo de transferência de energia entre a superfície sólida e a líquida ou gás adjacente, que está em movimento e que envolve os efeitos combinados de condução e de movimento de um fluido, (Çengel, 2010). Por sua vez, a radiação é a energia emitida pela matéria sob a forma de ondas eletromagnéticas (ou fótons) como resultado das mudanças nas configurações eletrônicas de átomos ou moléculas, (Çengel, 2010).

À medida que a ciência e a tecnologia avançam, diversos métodos foram desenvolvidos para resolver problemas de transferência de calor, incluindo abordagens analíticas, numéricas (utilizada nesse trabalho e citada anteriormente) e experimentais.

Segundo Maliska (2004), os métodos analíticos e os numéricos formam a classe dos métodos teóricos, pois ambos objetivam resolver equações diferenciais. A diferença está apenas na complexidade da equação que cada método pode atacar. Os métodos analíticos têm a desvantagem de ser aplicáveis apenas em problemas cujas hipóteses simplificativas os desviam demasiadamente do fenômeno físico real. Além disso, são aplicados, normalmente, a geometrias simples e condições de contorno também simples.

A experimentação numérica (uso de técnicas numéricas), por sua vez, praticamente não apresenta restrições, podendo resolver problemas com complicadas condições de contorno, definidos em geometrias arbitrárias e apresentando resultados com uma rapidez fantástica.

Com relação à experimentação em laboratório, sua grande vantagem é o fato de tratar com a configuração real. Ela é, entretanto, de altíssimo custo e muitas vezes não

pode ser realizada, por questões de segurança, como é o caso da transferência de calor no núcleo de reatores nucleares, ou pela dificuldade de reprodução das condições reais, como, por exemplo, no escoamento supersônico a grandes altitudes ou na simulação de reservatórios de petróleo. Na ausência de modelos matemáticos estabelecidos e em geometrias extremamente complexas, muitas vezes é a única alternativa de que o projetista dispõe.

2.2.1 Condução

A condução de calor visa compreender a transferência de energia das partículas mais energéticas para as menos energéticas decorrente das interações entre partículas em uma material. Para sua descrição, a principal equação utilizada é a Equação da Lei de Fourier, que estabelece que a taxa de transferência de calor (q'') é diretamente proporcional à condutividade térmica do material (k) e ao gradiente de temperatura entre as duas extremidades do material (dT/dx).

$$q'' = \frac{q}{A} = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.1)$$

Essa equação mostra que quanto maior a condutividade térmica do material, maior a taxa de condução de calor. Além disso, a área de seção transversal afeta a taxa de transferência de calor, bem como o gradiente de temperatura. Um gradiente mais íngreme resulta em uma maior taxa de condução de calor.

Segundo Figueiredo (2018), em diversas aplicações, surge o desafio de lidar com variações temporais nas temperaturas, que não se mantêm constantes, como requerido pela Lei de Fourier. Para superar essa dificuldade, faz-se uso da grandeza denominada "fluxo de calor". Através de uma série de considerações e manipulações matemáticas, é possível obter a equação de calor, também conhecida como equação de difusão térmica (apresentada abaixo, na forma retangular).

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{\dot{q}}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2)$$

2.2.2 Convecção

A convecção ocorre devido a diferenças de temperatura no fluido, o que leva a variações na densidade e, conseqüentemente, ao movimento das partículas. A convecção é

um mecanismo complexo que envolve a combinação de condução de calor e advecção de matéria. Na convecção, o calor é transferido através do movimento de massas de fluidos quentes em direção a regiões mais frias. Esse movimento é caracterizado por correntes de convecção que podem ocorrer de forma natural, como no caso do aquecimento de ar em uma sala, ou ser pode ser forçado, como em sistemas de aquecimento e ar condicionado.

Apesar da complexidade da convecção, observa-se que a taxa de transferência de calor por convecção é proporcional à diferença de temperatura e está muito bem expressa pela lei de Newton do resfriamento, Çengel (2010).

$$\dot{q} = h(T_s - T_\infty) \quad (2.3)$$

Sendo h o coeficiente de transferência de calor por convecção, T_s a temperatura da superfície e T_∞ a temperatura do ambiente.

2.3 Equações Diferenciais

Equações diferenciais é uma área fundamental da matemática e da física que descrevem a variação de grandezas em relação a um referencial, em especial o tempo e espaço. Elas são amplamente utilizadas para representar uma variedade de fenômenos, desde o movimento de corpos até o comportamento de sistemas elétricos e dinâmica de fluidos.

Essas equações expressam relações entre uma função e a sua taxa de variação, mostrando como uma variável afeta a outra, e possuindo duas classificações principais: as equações diferenciais ordinárias (EDOs), que envolvem uma única variável independente e as equações diferenciais parciais (EDPs), que lidam com funções de várias variáveis e suas derivadas parciais.

Os métodos para a solução de EDOs e EDPs desempenham um papel crucial na modelagem e resolução de uma ampla gama de problemas em ciência e engenharia. Para EDOs, os métodos analíticos, como a separação de variáveis e o fator integrante, podem ser usados em situações simples. No entanto, para problemas mais complexos e não lineares, os métodos numéricos, como o método de Euler, método de Runge-Kutta e as diferenças finitas, provam ser ferramentas essenciais. Quando se trata de EDPs, os métodos numéricos são amplamente empregados, incluindo os métodos das diferenças finitas, dos elementos finitos e dos volumes finitos. Esses métodos permitem a resolução aproximada das EDOs e EDPs, o que é essencial para abordar problemas complexos que não têm soluções analíticas diretas. Portanto, a escolha do método depende da natureza

do problema e da precisão desejada na solução.

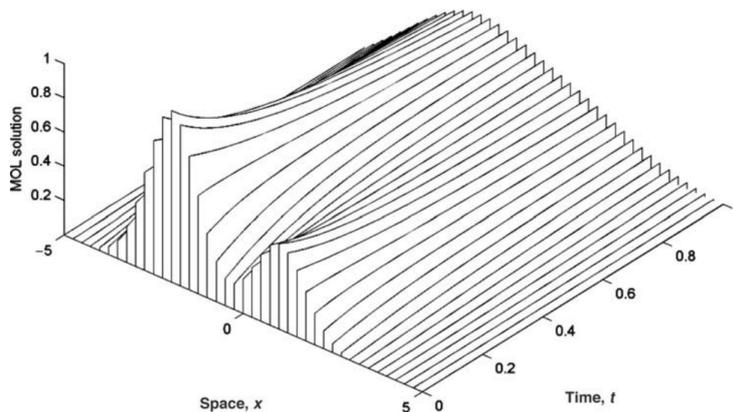
2.3.1 Método Numérico das Linhas

Segundo Wouwer, Saucez e W. Schiesser (2001), o método numérico das linhas (NUMOL, ou apenas MOL) é uma abordagem abrangente para a solução de problemas de EDP dependentes do tempo que basicamente ocorre em duas etapas: (1) as derivadas espaciais são primeiro aproximadas usando, por exemplo, técnicas de diferenças finitas ou de elementos finitos, e (2) o sistema resultante de EDOs semidiscretas (discretas no espaço - contínuas no tempo) é integrado no tempo. O sucesso deste método decorre da disponibilidade de algoritmos numéricos de alta qualidade e software associado para a solução de sistemas rígidos de EDOs.

A principal ideia por trás do NUMOL é transformar uma EDP em um sistema de EDOs acopladas, substituindo a derivada espacial por diferenças finitas. Isso resulta em um conjunto de EDOs que podem ser resolvidas numericamente por métodos tradicionais, como o método de Runge-Kutta ou o método de Euler, que são amplamente conhecidos e bem estabelecidos. Portanto, o NUMOL divide o domínio espacial em uma série de pontos discretos, formando um sistema de EDOs para cada ponto.

Essa abordagem torna o NUMOL altamente versátil e eficiente, permitindo a simulação de sistemas complexos em que a dimensão espacial é contínua. Além disso, o NUMOL é particularmente adequado para a análise de sistemas transientes, onde as condições podem variar ao longo do tempo. No entanto, como em qualquer método numérico, a escolha de discretização adequada e a precisão da solução dependem da natureza do problema em questão.

Figura 2.2: Ilustração representativa da origem do método numérico das linhas.



Fonte: W. E. Schiesser e Griffiths, 2009.

2.3.2 Discretização por Diferenças Finitas

No contexto do NUMOL, uma variedade de métodos, como as diferenças finitas, elementos finitos e volumes finitos, são empregados para aproximar derivadas espaciais. No caso das diferenças finitas, o domínio de interesse é discretizado em uma grade de pontos, onde essas técnicas são aplicadas em cada ponto.

Essas discretizações variam em ordens de precisão. A primeira ordem utiliza valores em pontos próximos, como nas diferenças progressivas, regressivas e centrais. A segunda ordem, mais precisa, considera valores em pontos adjacentes e usa combinações ponderadas para calcular as derivadas. À medida que a ordem aumenta, a precisão também aumenta, mas a complexidade computacional cresce. Portanto, a escolha da ordem apropriada depende da necessidade de precisão e dos recursos computacionais disponíveis, com ordens superiores sendo preferíveis em cenários que requerem maior acurácia, especialmente em problemas com gradientes intensos ou detalhes finos.

A convergência é um aspecto fundamental para garantir que as soluções numéricas se aproximem das soluções exatas à medida que a discretização é refinada. À medida que reduzimos o tamanho dos intervalos ou aumentamos a quantidade de pontos na grade, esperamos que a solução numérica se aproxime da solução contínua ideal. No entanto, a convergência pode ser afetada por vários fatores, como a escolha do esquema de discretização, as condições de contorno e as características do problema.

Segundo (Chapra, 2011), a convergência significa que, quando δx e δt tendem a zero, os resultados da técnica por diferenças finitas se aproximam da solução verdadeira. A estabilidade significa que erros em qualquer estágio do cálculo não são amplificados, mas,

sim, atenuados conforme os cálculos progridem.

Outro conceito importante é o de estabilidade, que está associado à possibilidade de que pequenos erros introduzidos durante um procedimento matemático possam ser reduzidos à medida que o procedimento continua. Reciprocamente, ocorre instabilidade se pequenos erros tendem a aumentar, talvez sem limite. Se estivermos resolvendo numericamente um problema de valor inicial, o melhor que podemos esperar é que a aproximação numérica tenha comportamento semelhante ao da solução exata. Não podemos transformar um problema instável em um estável simplesmente aproximando sua solução numericamente. No entanto, pode acontecer que um procedimento numérico introduza instabilidade, que não fazia parte do problema original, o que pode causar problemas quando se aproxima a solução. Para evitar tal instabilidade, pode ser necessário colocar restrições sobre o tamanho do passo h , (Boyce, Dippina e Meade, 2020).

Capítulo 3

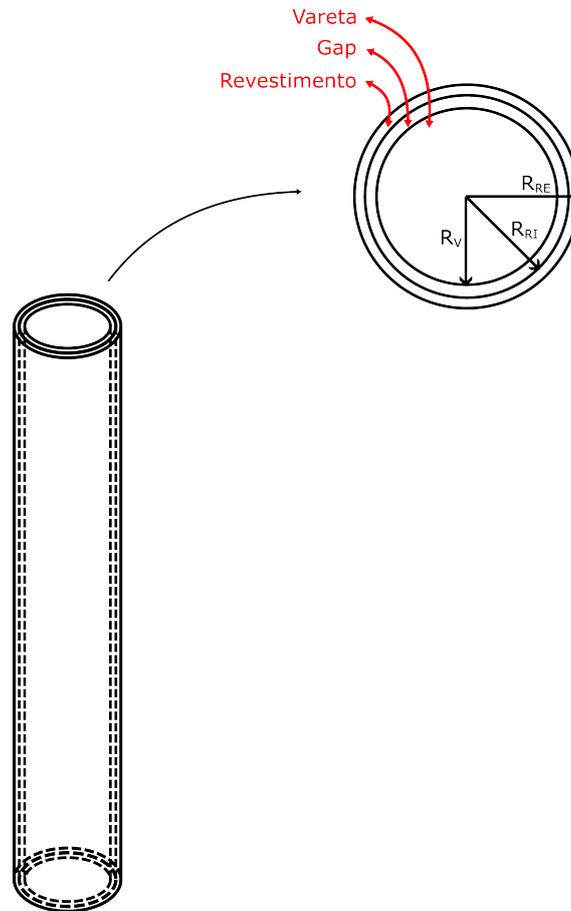
Metodologia

3.1 Modelagem Matemática

Um combustível nuclear é composto por três partes: a vareta de combustível central, a região de gap ao redor dela e o revestimento exterior.

- **Vareta de Combustível:** É a parte central responsável pela geração de energia no reator nuclear. A escolha do material e sua configuração são cruciais para uma reação nuclear controlada e eficiente.
- **Região de Gap:** Essa área vazia em torno da vareta de combustível tem várias funções, incluindo o controle térmico e a redução do superaquecimento. Sua geometria influencia na eficiência e segurança do reator.
- **Revestimento:** O revestimento exterior atua como uma barreira para conter produtos de fissão e químicos gerados durante a operação do reator, impedindo que contaminem o meio ambiente. Deve ser resistente à radiação e corrosão.

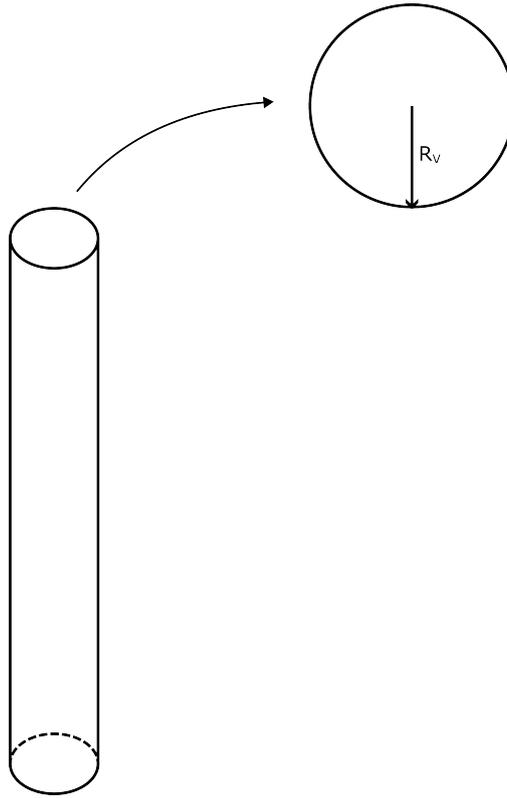
Figura 3.1: Representação da vareta de combustível nuclear, com o revestimento e a região de gap.



Fonte: Adaptado de Soares (2017).

Ao utilizar este modelo, certas considerações são válidas: As variações de temperatura nas direções angular e axial são desprezíveis, simplificando o problema para uma transferência de calor radial, devido ao fluxo de calor do centro da vareta para sua superfície; além disso, a espessura do revestimento e da região de gap é tão pequena em comparação com o raio do combustível que pode ser desconsiderada em termos práticos, conforme evidenciado nos trabalhos de Soares (2017) e Soares, Guedes e Neto (2018).

Figura 3.2: Representação simplificada da vareta de combustível nuclear.



Fonte: Adaptado de Soares (2017).

Logo, segundo Soares (2017), o problema é modelado pela equação da condução de calor unidimensional transiente, com propriedades termofísicas constantes, e definido em coordenadas cilíndricas, através das equações abaixo:

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(kr' \frac{\partial T}{\partial r'} \right) + \dot{q} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t'} \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{r'} \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \frac{\partial T}{\partial r'} \right) + \frac{g(r', t')}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t'} \quad (3.2)$$

Submetida as seguintes condições de contorno na direção radial:

$$\frac{\partial T(t', 0)}{\partial r'} = 0 \quad (3.3)$$

$$k \frac{\partial T(t', R_V)}{\partial r'} + h(T - T_\infty) = 0 \quad (3.4)$$

Sendo a equação 3.3 de segundo tipo (condição de contorno de Neumann), ou seja, especifica os valores que a derivada de uma solução deve tomar no contorno do domínio; enquanto que a equação 3.4 de terceiro tipo (condição de contorno de Robin), ou seja, é especifica uma combinação linear dos valores de uma função e dos valores de sua derivada no limite do domínio.

Segundo Soares (2017), a equação 3.4 representa a troca calor por convecção com o ambiente através do fluido refrigerante. Além disso, observa-se a consideração da troca de calor na interface de contato entre a vareta combustível e o material de revestimento, na região de gap, assim como a condução no revestimento. Esses efeitos são incorporados no coeficiente de transferência de calor por convecção entre o cilindro e o refrigerante, como uma primeira aproximação para obter o perfil de temperatura transitória no elemento.

Iremos adimensionalizar o problema, para tornar possível uma resolução mais simplificada das equações diferenciais parciais e a obtenção de soluções para diversas situações de transferência de energia. Esse processo envolve a introdução de parâmetros adimensionais, que desempenham um papel fundamental na análise e na modelagem do fenômeno. Os parâmetros adimensionais usados incluem:

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_\infty} \quad (3.5)$$

$$r = \frac{r'}{R} \quad (3.6)$$

$$t = \frac{kt'}{\rho c_p R_V^2} = \frac{\alpha t'}{R_V^2} \quad (3.7)$$

$$G(r, t) = \frac{g(r', t') R_V^2}{k T_\infty} \quad (3.8)$$

$$G^* = \frac{GR_V^2}{kT_\infty} \quad (3.9)$$

Substituindo os parâmetros adimensionais nas equações 3.2, 3.3 e 3.4, obtém-se o problema na forma adimensional:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + G(r, t) = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \theta(t, 0)}{\partial r} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \theta(t, 1)}{\partial r} + \frac{hR}{k} \theta = 0 \quad (3.12)$$

A condição de contorno 3.12 pode, ainda, ser escrita como:

$$\frac{\partial \theta(t, 1)}{\partial r} + Bi\theta = 0 \quad (3.13)$$

3.2 Discretização Numérica

No método das linhas as derivadas parciais espaciais da EDP são aproximadas algebricamente (W. E. Schiesser e Griffiths, 2009), no nosso caso por diferenças finitas utilizando expansão de séries de Taylor.

A derivada de primeira ordem é expressa por:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial r} = \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta r} + O(\Delta r^2), \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.14)$$

Já a de segunda ordem é expressa por:

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial r^2} = \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta r^2} + O(\Delta r^2), \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.15)$$

Manipulando a equação 3.10 e inserindo 3.14 e 3.15, temos que:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + G(r, t) = \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \approx \frac{1}{r} \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta r} + \frac{\theta_{i+1} - 2\theta_i + \theta_{i-1}}{\Delta r^2} + G(r, t), \quad 1 \leq i \leq N \quad (3.17)$$

Vale salientar que, para os nós $i = 1$ e $i = N$, as variáveis θ_{i-1} e θ_{i+1} (respectivamente) são fictícias. Portanto, através das condições de contorno, é necessário realizar as correções para essas situações.

3.2.1 Condições de Contorno

Das equações 3.11 e 3.14, temos que:

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} \approx \frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta r} \approx 0, \quad i = 1 \quad (3.18)$$

$$\theta_{i-1} \approx \theta_{i+1}, \quad i = 1 \quad (3.19)$$

Logo, inserindo 3.19 em 3.17, temos que:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \approx 2 \frac{\theta_{i+1} - \theta_i}{\Delta x^2} + G, \quad i = 1 \quad (3.20)$$

Obtemos que 3.20 é a condição de correção do ponto fictício na origem.

Dessa vez, das equações 3.13 e 3.14, temos que:

$$\frac{\theta_{i+1} - \theta_{i-1}}{2\Delta r} + Bi\theta_i \approx 0, \quad i = N \quad (3.21)$$

$$\theta_{i+1} \approx \theta_{i-1} - 2Bi\Delta r\theta_i, \quad i = N \quad (3.22)$$

Logo, inserindo 3.22 em 3.17, temos que:

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} \approx -\frac{Bi\theta_i}{r} + \frac{2\theta_{i-1} - 2(Bi\Delta r + 1)\theta_i}{\Delta r^2}, \quad i = N \quad (3.23)$$

Obtemos que 3.23 é a condição de correção do ponto fictício no superfície.

3.3 Solução do Sistema de Equações Diferenciais

Existem diversas abordagens para resolver sistemas de equações diferenciais, cada uma adequada às características do problema e às condições iniciais ou de contorno. Neste contexto, utilizamos um solver numérico dentro do software Matlab (licenciado pela presente instituição de ensino), que oferece uma variedade de algoritmos eficazes para a solução desses sistemas, incluindo os solvers ode45, ode23, ode78, ode15s, ode23t e ode15i, (Matlab, s.d.[a]).

No presente trabalho, optamos pelo solver ode15s devido à sua notável capacidade de lidar com sistemas de equações diferenciais que exibem comportamento rígido. Segundo Matlab (s.d.[b]), esse comportamento rígido ocorre quando o tamanho dos passos de integração é forçado a se tornar excessivamente pequeno em relação ao intervalo de integração, mesmo em regiões onde a curva da solução é suave. Esse problema pode levar a passos tão minúsculos que a integração se torna demorada e até inviável, tornando o ode15s uma escolha versátil para uma ampla gama de aplicações que envolvem mudanças abruptas e descontínuas nas equações diferenciais.

Capítulo 4

Resultados e Discussão

4.1 Refinamento de Malha

Iniciamos nossa análise dos resultados com um estudo sobre o refinamento das malhas temporal e espacial. O objetivo é compreender como os resultados se comportam diante de variações nesses parâmetros, ou seja, a estabilidade da solução e, conseqüentemente, determinar o número de pontos na malha numérica para utilização.

De acordo com W. E. Schiesser e Griffiths (2009), o ajuste do espaçamento da grade em diferentes partes ou em todo o domínio do problema é conhecido como refinamento "h". Essa nomenclatura é comumente usada na literatura de análise numérica, onde "h" é símbolo para o espaçamento da grade. O refinamento "h" busca melhorar a precisão da solução, refinando o espaçamento da grade com base em estimativas de erro de truncamento local ou outros parâmetros de refinamento. É importante destacar que não existe uma única combinação universalmente ideal de refinamento; a solução de problemas complexos frequentemente envolve tentativa e erro para encontrar o equilíbrio entre precisão e carga computacional. O objetivo final é alcançar um limite predefinido para o erro global com o mínimo esforço computacional necessário.

4.1.1 Malha Temporal

Para a presente análise, buscou-se analisar o máximo erro absoluto de uma malha com a equivalente mais refinada, a fim de se compreender a estabilidade das mesmas.

$$\epsilon = \max |\Delta\theta| = \max |\theta(r, t_{n+1}) - \theta(r, t_n)| \quad (4.1)$$

Através do estudo do refinamento da malha temporal, pode-se observar que, para malhas com até 1.281 pontos, não foram identificados erros significativos, como registrado na Tabela 4.1. Quando o número de pontos variou de 1.281 para 20.481, observou-se uma discrepância praticamente insignificante.

No entanto, é importante destacar que, para malhas com mais de 40.961 pontos, o erro passou a ser significativo. Essa discrepância pode ser atribuída à formação de singularidades resultantes de um refinamento excessivo da malha em conjunto à tolerância de erro absoluto e/ou relativo predefinida no solver utilizado.

Portanto, optou-se por utilizar uma malha temporal com 100 pontos, que se mostrou apropriada para a resolução do problema em questão.

Tabela 4.1: Erro numérico no refino da malha temporal.

Pontos na Malha	Tamanho da Malha [s]	Erro
11	0,15	-
21	0,075	0
41	0,0375	0
81	0,0188	0
161	0,00938	0
321	0,00469	0
641	0,00234	0
1.281	0,00117	0
2.561	5,86E-04	1,26E-12
5.121	2,93E-04	9,66E-13
10.241	1,46E-04	5,50E-12
20.481	7,32E-05	3,94E-12
40.961	3,66E-05	0,000519651

Fonte: Autor, 2023.

4.1.2 Malha Espacial

Para a presente análise, buscou-se analisar o máximo erro absoluto de uma malha com a equivalente mais refinada, a fim de se compreender a estabilidade das mesmas.

$$\epsilon = \max |\Delta\theta| = \max |\theta(r_{n+1}, t) - \theta(r_n, t)| \quad (4.2)$$

Através do estudo do refinamento da malha temporal, pode-se observar que, para malhas com um número de pontos variando de 76 a 151, não foram observados erros significativos, como registrado na Tabela 4.2. Quando o número de pontos variou de 151 para 2.401, observou-se uma discrepância praticamente insignificante.

No entanto, é importante destacar que, para malhas com mais de 2.401 pontos, o erro passou a ser significativo. Novamente, essa discrepância pode ser atribuída à formação de singularidades resultantes de um refinamento excessivo da malha em conjunto à tolerância de erro absoluto e/ou relativo predefinida no solver utilizado.

Portanto, optou-se por utilizar uma malha espacial com 100 pontos, que se mostrou apropriada para a resolução do problema em questão.

Tabela 4.2: Erro numérico no refino da malha espacial.

Pontos na Malha	Tamanho da Malha	Erro
76	0,0133	-
151	0,00667	0
301	0,00333	3,51E-05
601	0,00167	1,14E-05
1.201	8,33E-04	2,19E-05
2.401	4,17E-04	1,18E-05
4.801	2,08E-04	0,00021
9.601	1,04E-04	0,00046

Fonte: Autor, 2023.

4.2 Perfis de Transferência de Calor

Nesta seção, discutiremos os resultados obtidos para quatro formas de geração de calor. Além disso, faremos uma comparação com os resultados apresentados por Soares (2017), que por sua vez se baseou no trabalho de Bhattacharya et al. (2001). É relevante mencionar que os resultados de Soares (2017) foram obtidos digitalmente, utilizando um software para coletar pontos em curvas. Portanto, devemos considerar que alguns erros foram introduzidos durante esse processo.

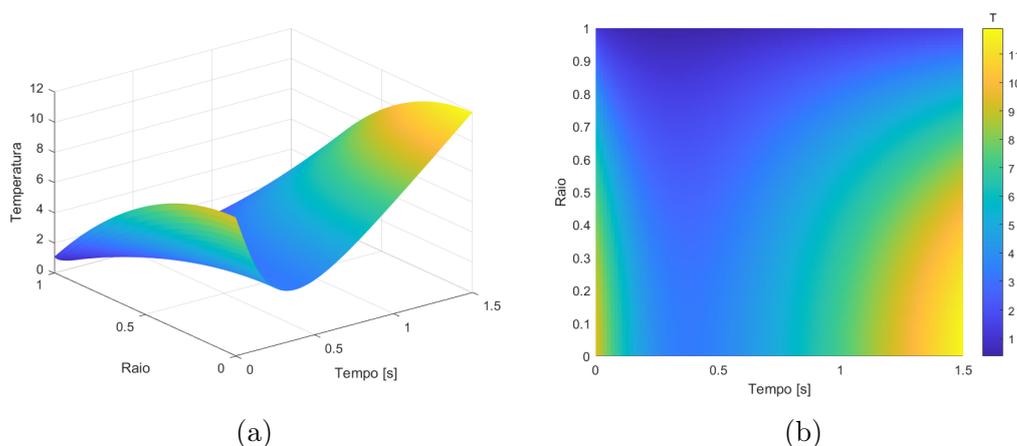
Para todos os casos, inicialmente o valor do termo fonte de calor uniforme adimensional (G^*) foi considerado igual a 32,4 e o número de *Biot* foi considerado igual a 15, ambos seguindo a literatura.

4.2.1 Primeira Forma de Geração de Calor

A primeira forma de geração de calor foi proposta por Bhattacharya et al. (2001) e referenciada por Soares (2017), ela se dá pela equação:

$$G' = G^*t \quad (4.3)$$

Figura 4.1: Perfis de temperatura para primeira forma de geração de calor: (a) perspectiva isométrica; (b) vista superior.



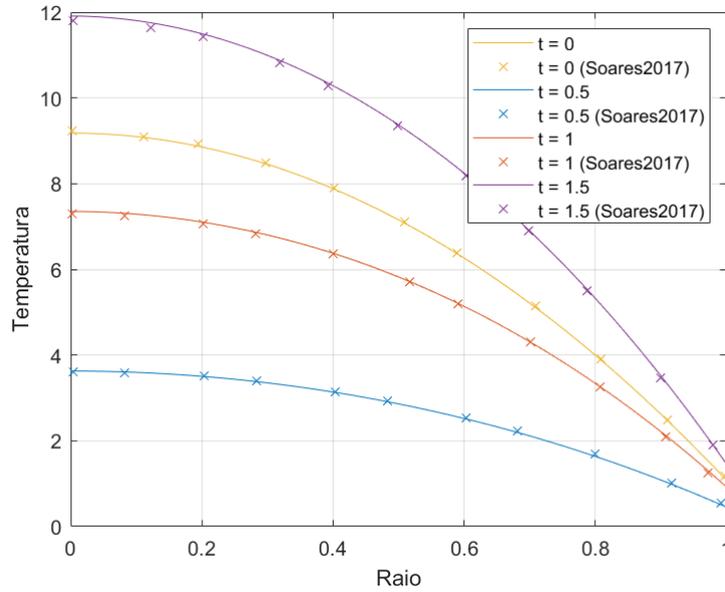
Fonte: Autor, 2023.

O perfil de temperatura apresentado na forma de superfície na Figura 4.1 apresenta o variação de temperatura (adimensionalizada) através do raio da vareta de combustível, considerando a primeira forma de geração de calor, conforme equação 4.3.

Ao longo de todo o período de tempo, a origem da vareta exibiu o valor máximo de temperatura, enquanto a extremidade manteve a temperatura mínima. Esse padrão era esperado, considerando a fonte de calor na origem, que se propaga ao longo da vareta em direção à extremidade e, por fim, a superfície da vareta apresentando um resfriamento convectivo.

Observou-se, ainda, que a origem da vareta demonstrou um comportamento com uma temperatura inicial elevada, passando por um processo de resfriamento, seguido de um subsequente aquecimento, algo que não era esperado.

Figura 4.2: Comparativo de resultados com a literatura para primeira forma de geração de calor.



Fonte: Autor, 2023.

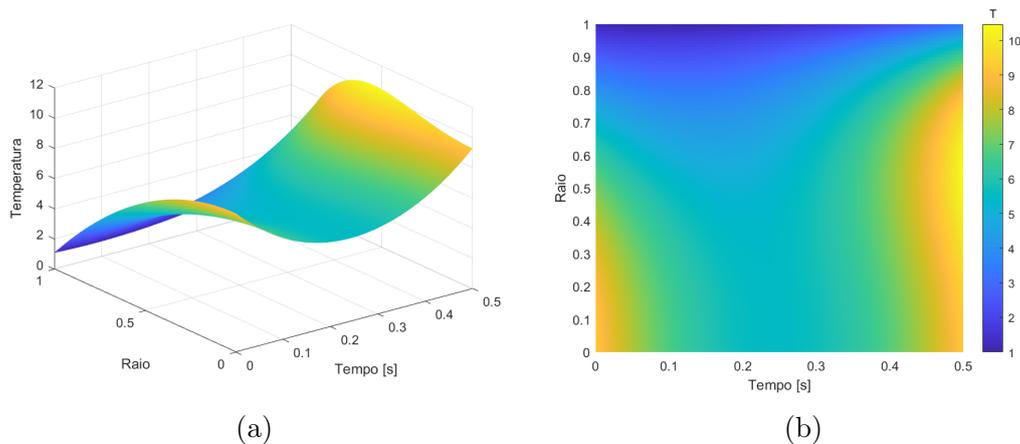
Resultados análogos à Figura 4.1 foram apresentados na Figura 4.2, mas dessa vez na forma de curvas para quatro instantes de tempos. Os resultados foram comparados com os apresentados por Soares (2017), em todos os casos houve concordância entre os perfis de temperatura, com eventuais divergências decorrentes do método de obtenção dos dados, conforme supradito.

4.2.2 Segunda Forma de Geração de Calor

A segunda forma de geração de calor foi proposta por Bhattacharya et al. (2001) e referenciada por Soares (2017), ela se dá pela equação:

$$G' = G^* r^2 e^{c_3 t} \quad (4.4)$$

Figura 4.3: Perfis de temperatura para segunda forma de geração de calor: (a) perspectiva isométrica; (b) vista superior.



Fonte: Autor, 2023.

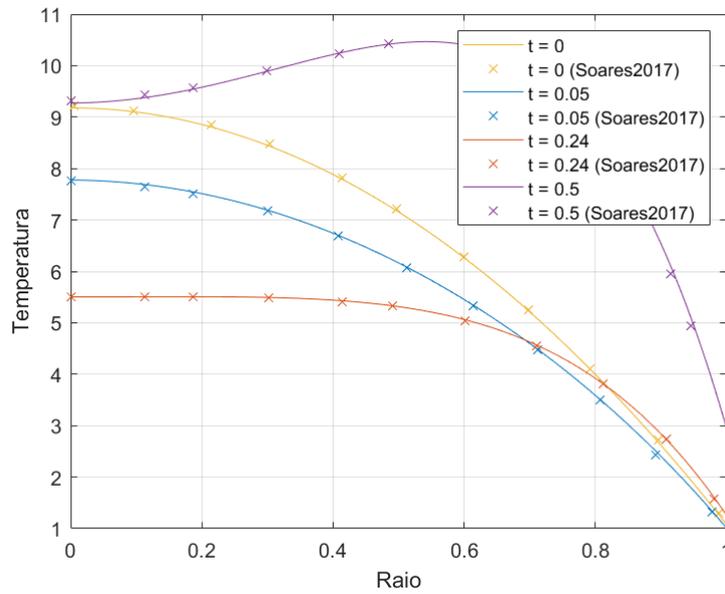
O perfil de temperatura apresentado na forma de superfície na Figura 4.3 apresenta o variação de temperatura (adimensionalizada) através do raio da vareta de combustível, considerando a segunda forma de geração de calor, conforme equação 4.4.

Para o presente caso, o intervalo de tempo foi reduzido para reproduzir o fenômeno de forma mais significativa.

Durante a maior parte do período de tempo a origem da vareta exibiu o valor máximo de temperatura, enquanto que a extremidade apresentou a temperatura mínima, porém com o passar do tempo (últimos instantes da simulação) houve uma transição do valor máximo da origem para a extremidade.

Observou-se, ainda, que que todos os pontos do raio demonstraram um comportamento de crescimento incessante de temperatura, com o passar do tempo, indicando que a geração de calor na origem superou o resfriamento na superfície.

Figura 4.4: Comparativo de resultados com a literatura para segunda forma de geração de calor.



Fonte: Autor, 2023.

Resultados análogos à Figura 4.3 foram apresentados na Figura 4.4, mas dessa vez na forma de curvas para quatro instantes de tempos. Os resultados foram comparados com os apresentados por Soares (2017), em todos os casos houve concordância entre os perfis de temperatura, com eventuais divergências decorrentes do método de obtenção dos dados, conforme supradito.

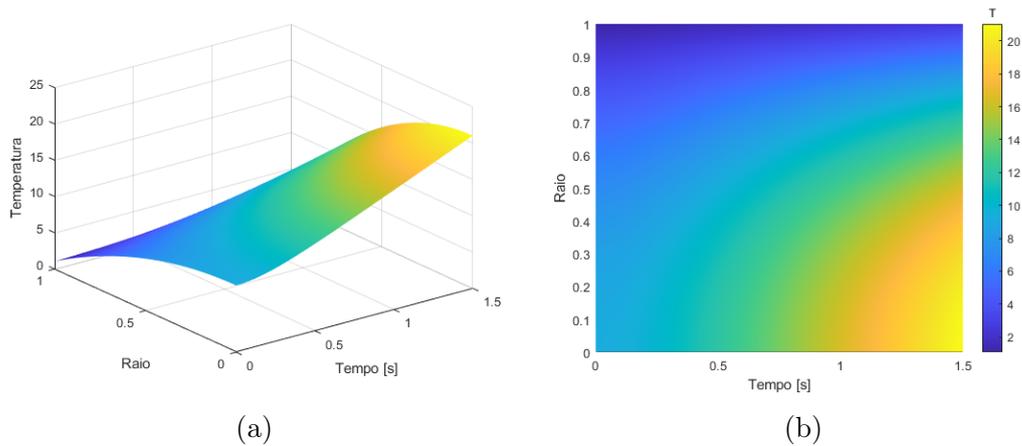
4.2.3 Terceira Forma de Geração de Calor

A terceira forma de geração de calor foi proposta por Soares (2017), ela se dá pela equação:

$$G' = G^*(1 + c_1 t) \quad (4.5)$$

Nela, o valor do coeficiente c_1 foi considerado igual a 1, seguindo a literatura.

Figura 4.5: Perfis de temperatura para terceira forma de geração de calor: (a) perspectiva isométrica; (b) vista superior.



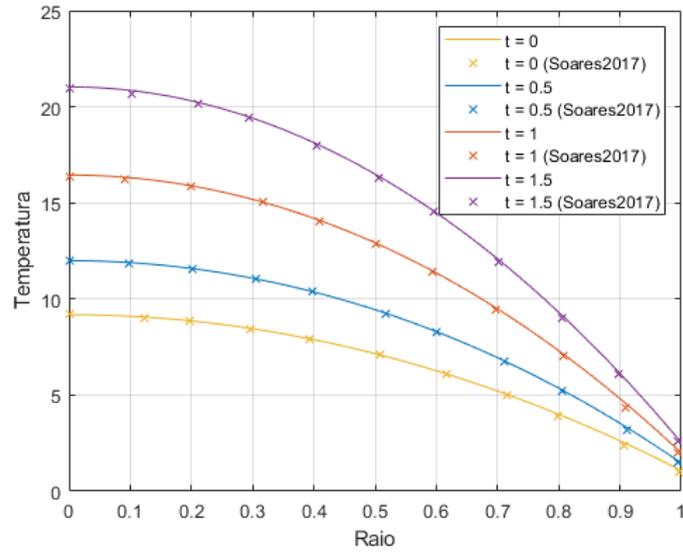
Fonte: Autor, 2023.

O perfil de temperatura apresentado na forma de superfície na Figura 4.5 apresenta o variação de temperatura (adimensionalizada) através do raio da vareta de combustível, considerando a terceira forma de geração de calor, conforme equação 4.5.

De forma análoga a primeira forma de geração de calor, ao longo de todo o período de tempo, a origem da vareta exibiu o valor máximo de temperatura, enquanto a extremidade manteve a temperatura mínima. Novamente, esse padrão era esperado, considerando a fonte de calor na origem, que se propaga ao longo da vareta em direção à extremidade e, por fim, a superfície da vareta apresentando um resfriamento convectivo.

Observou-se, ainda, que com o passar do tempo houve um aumento expressivo de temperatura na origem com propagação para a região da superfície, indicando que com o passar do tempo a geração de calor tendeu a superar o resfriamento na superfície.

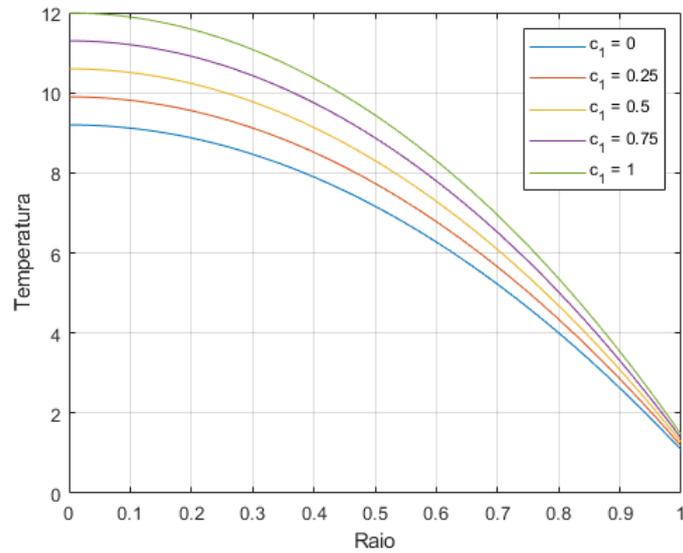
Figura 4.6: Comparativo de resultados com a literatura para terceira forma de geração de calor.



Fonte: Autor, 2023.

Resultados análogos à Figura 4.5 foram apresentados na Figura 4.6, mas dessa vez na forma de curvas para quatro instantes de tempos. Os resultados foram comparados com os apresentados por Soares (2017), em todos os casos houve concordância entre os perfis de temperatura, com eventuais divergências decorrentes do método de obtenção dos dados, conforme supradito.

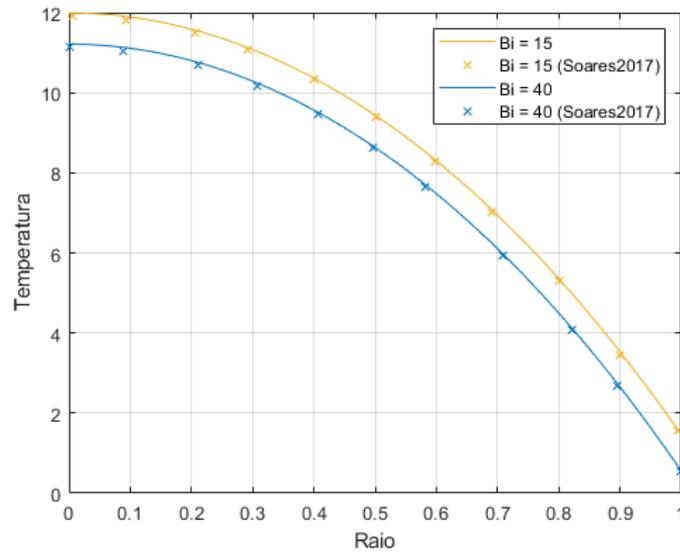
Figura 4.7: Influência nos perfis de temperatura devido a variação no coeficiente c_1 da terceira forma de geração de calor.



Fonte: Autor, 2023.

Em seguida, buscou-se estudar a influência do coeficiente c_1 nos perfis de temperatura. Através da Figura 4.7 pode-se observar que com o aumento do valor do coeficiente, houve um aumento dos valores de temperatura, algo esperado devido a expressão da geração de calor.

Figura 4.8: Influência nos perfis de temperatura devido a variação no número de Bi na terceira forma de geração de calor.



Fonte: Autor, 2023.

Por fim, buscou-se estudar a influência do número de Biot nos perfis de temperatura. Através da Figura 4.8 pode-se observar que com o aumento do número de Biot, houve um decréscimo dos valores de temperatura, algo esperado devido a interpretação do mesmo (razão entre o coeficiente de transferência convectiva de calor na superfície e a condutância específica).

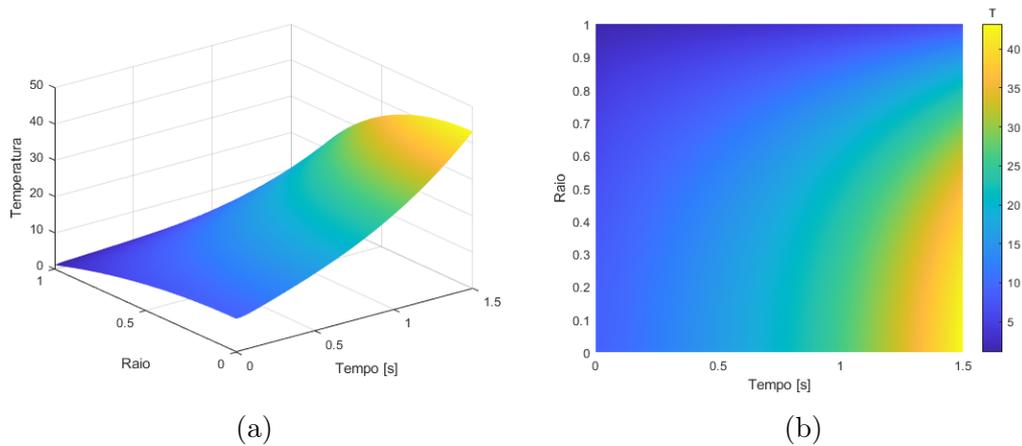
4.2.4 Quarta Forma de Geração de Calor

A quarta forma de geração de calor foi proposta por Soares (2017), ela se dá pela equação:

$$G' = G^*(1 + c_2 r^2) e^{c_3 t} \quad (4.6)$$

Nela, os coeficientes c_2 e c_3 foram considerados ambos iguais a 1, seguindo a literatura.

Figura 4.9: Perfis de temperatura para quarta forma de geração de calor: (a) perspectiva isométrica; (b) vista superior.



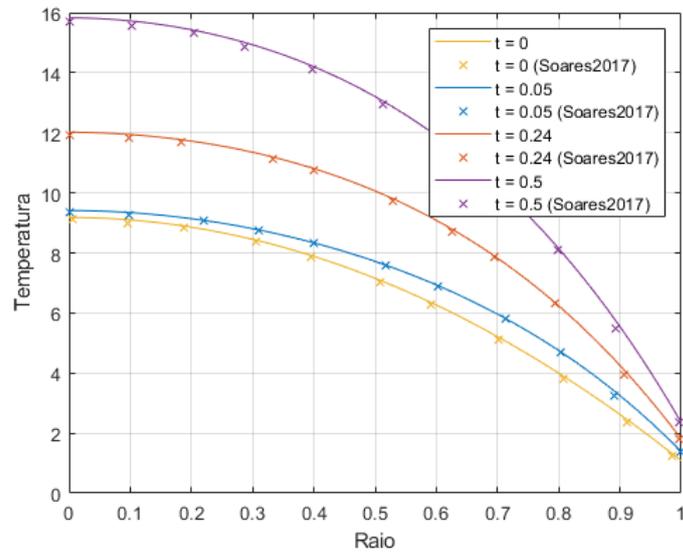
Fonte: Autor, 2023.

O perfil de temperatura apresentado na forma de superfície na Figura 4.9 apresenta o variação de temperatura (adimensionalizada) através do raio da vareta de combustível, considerando a quarta forma de geração de calor, conforme equação 4.6.

De forma análoga a terceira forma de geração de calor, ao longo de todo o período de tempo, a origem da vareta exibiu o valor máximo de temperatura, enquanto a extremidade manteve a temperatura mínima. Novamente, esse padrão era esperado, considerando a fonte de calor na origem, que se propaga ao longo da vareta em direção à extremidade e, por fim, a superfície da vareta apresentando um resfriamento convectivo.

Observou-se, ainda, que com o passar do tempo houve um aumento expressivo de temperatura na origem com propagação para a região da superfície, indicando que com o passar do tempo a geração de calor tendeu a superar o resfriamento na superfície.

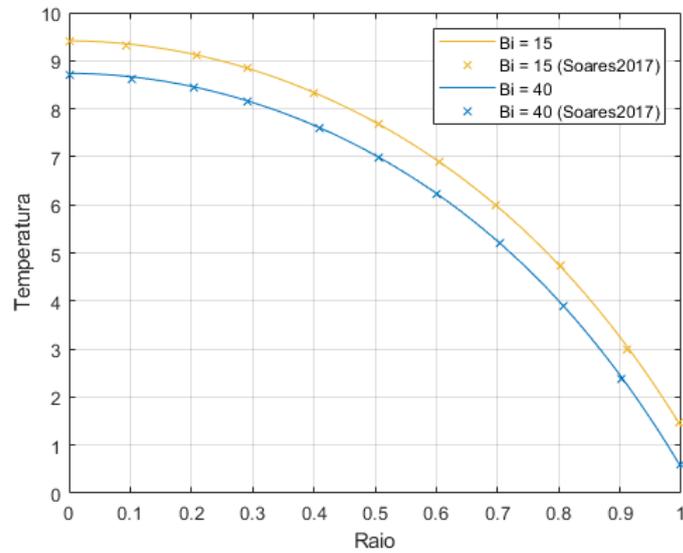
Figura 4.10: Comparativo de resultados com a literatura para quarta forma de geração de calor.



Fonte: Autor, 2023.

Resultados análogos à Figura 4.9 foram apresentados na Figura 4.10, mas dessa vez na forma de curvas para quatro instantes de tempos. Os resultados foram comparados com os apresentados por Soares (2017), em todos os casos houve concordância entre os perfis de temperatura, com eventuais divergências decorrentes do método de obtenção dos dados, conforme supradito.

Figura 4.11: Influência nos perfis de temperatura devido a variação no número de Bi na quarta forma de geração de calor.



Fonte: Autor, 2023.

Por fim, buscou-se estudar a influência do número de Biot nos perfis de temperatura. Através da Figura 4.11 pode-se observar que com o aumento do número de Biot, houve um decréscimo dos valores de temperatura, algo esperado devido a interpretação do mesmo (razão entre o coeficiente de transferência convectiva de calor na superfície e a condutância específica).

Capítulo 5

Conclusões

Este trabalho realizou um estudo de um problema clássico na transferência de calor, especificamente abordando a equação de calor unidimensional em coordenadas cilíndricas. Baseando-se em hipóteses simplificadoras da literatura, adotamos a abordagem de simulação numérica pelo método numérico das linhas (NUMOL), com uma discretização baseada na técnica de diferenças finitas. O contexto aplicado envolveu varetas de combustíveis nucleares, proporcionando uma perspectiva prática e relevante.

O estudo incluiu simulações numéricas para avaliar a convergência da malha numérica em relação às variáveis espaciais e temporais, visando compreender a estabilidade do modelo numérico. Observou-se que malhas mais grossas mantiveram estabilidade, enquanto malhas muito refinadas levaram a divergências de resultados devido à formação de pontos de singularidade.

Em seguida, foram realizadas simulações para quatro cenários distintos de geração de calor, explorando o comportamento da transferência de calor sujeita a geração interna, condução no domínio e convecção na superfície da vareta. Os resultados confirmaram os padrões esperados nos perfis de temperatura, com picos na origem do domínio e deslocamento do gradiente para a extremidade da vareta.

O estudo abrangeu também a variação de constantes das fontes de geração de calor e o número de Biot. Em todos os casos, o aumento desses parâmetros resultou em valores de temperatura mais elevados, alinhando-se às expectativas prévias. Os resultados foram comparados e validados a partir daqueles presentes na referência, que utilizou do método híbrido da Transformada Integral Generalizada (GITT).

Por fim, este trabalho não apenas proporcionou ideias valiosas sobre a transferência de calor, mas também demonstrou a aplicação eficaz de métodos numéricos para resolver problemas nesse campo, consolidando um aprendizado significativo.

Bibliografia

- [1] S. Bhattacharya et al. «Analytical Solution of Transient Heat Transfer with Variable Source for Applications in Nuclear Reactors». Em: *International Communications in Heat and Mass Transfer* 28 (7 2001), pp. 1005–1013. ISSN: 0735-1933. DOI: 10.1016/s0735-1933(01)00304-9.
- [2] W. E. Boyce, R. C. DiPrima e D. B. Meade. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 11^a ed. Editora LTC, 2020. ISBN: 978-85-216-2832-3.
- [3] Y. A. Çengel. *Transferência de Calor e Massa: Uma Abordagem Prática*. 4^a ed. McGraw-Hill Companies, 2010. ISBN: 978-00-733-9812-9.
- [4] S. C. Chapra. *Métodos Numéricos Para Engenharia*. 5^a ed. McGraw-Hill, 2011. ISBN: 978-85-86804-87-8.
- [5] ExxonMobil. *Energy demand: Three drivers*. 2023. URL: <https://corporate.exxonmobil.com/what-we-do/energy-supply/global-outlook/energy-demand#Transportation/>. Acesso em: 15 set. 2023.
- [6] D. G. Figueiredo. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 5^a ed. Editora IMPA, 2018. ISBN: 978-85-244-0428-3.
- [7] S. Glasstone e A. Sesonske. *Nuclear Reactor Engineering: Reactor Systems Engineering*. 4^a ed. Springer, 1994. ISBN: 978-14-613-5866-4.
- [8] H. Hirsch et al. *Perigos dos Reatores Nucleares. Riscos na Operação da Tecnologia Nuclear no Século XXI*. Rel. téc. Greenpeace Internacional, 2005.
- [9] C. R. Maliska. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional*. 2^a ed. Editora LTC, 2004. ISBN: 978-85-216-3335-8.
- [10] Matlab. *ode15s: Solve stiff differential equations and DAEs — variable order method*. Acesso em: 31 ago. 2023. URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode15s.html>.

- [11] Matlab. *Solve Stiff ODEs*. Acesso em: 31 ago. 2023. URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab/math/solve-stiff-odes.html>.
- [12] J. A. Perrotta. *Curso de Introdução à Engenharia do Núcleo de Reatores*. Instituto de Pesquisas Energéticas e Nucleares, 1999.
- [13] Empresa de Pesquisa Energética. *Balanço Energético Nacional*. Rel. téc. Ministério de Minas e Energia, 2022.
- [14] L. C. M. Rezende e L. V. R. Bortotti. «Fluxo Crítico de Calor como Parâmetro de Projeto em Sistemas Nucleares». Monografia. São Paulo: Universidade Presbiteriana Mackenzie, 2019.
- [15] J. A. D. Salomé. «Análise de Parâmetros Relevantes para a Armazenagem e Deposição de Combustíveis Irrradiados de Sistemas Nucleares Inovadores». Tese. Universidade Federal de Minas Gerais, 2016.
- [16] W. E. Schiesser e G. W. Griffiths. *A Compendium of Partial Differential Equation Models: Method of Lines Analysis with Matlab*. 1^a ed. 2009. ISBN: 978-0-511-50853-0.
- [17] F. A. Soares. «Análise Direta e Inversa da Transferência de Calor Transiente com Termo Fonte Variável em Varetas Combustíveis de Reatores Nucleares». Dissertação. Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2017.
- [18] F. A. Soares, R. O. C. Guedes e F. S. Neto. «Análise da influência do revestimento na transferência de calor transiente em varetas combustíveis de reatores nucleares». Em: *Revista Militar de Ciência e Tecnologia* 35.3 (2018), pp. 18–25.
- [19] A. V. Wouwer, P. Saucez e W.E. Schiesser. *Adaptive method of lines*. 1^a ed. Chapman e Hall/CRC Press, 2001. ISBN: 978-1-584-88231-2.

Apêndice A

Códigos em MATLAB

A.1 Convergência da Malha Temporal

```
1 clear
2 close all
3 clc
4
5 %% Inputs
6
7 r0 = 0; % Beginning of the r axis
8 r1 = 1; % End of the r axis (Length L)
9 t0 = 0; % Start time
10 t1 = 1.5; % End time
11 Bi = 15; % Biot number
12 Gast = 32.4; % Heat source term
13
14 nr = 101; % Points in spatial mesh
15 number_of_meshes = 13; % Number of temporal meshes
16 mesh = zeros(number_of_meshes, 1); % Preallocation of the vector of ...
    the number of points in the temporal mesh
17
18 %% Calculations
19
20 % Initial Parameters
21 mesh(1) = 11; % ...
    Initial number of points in the temporal mesh
22 convergence_matrix = zeros(mesh(1), nr, number_of_meshes); % ...
    Convergence matrix
```

```

23
24 for idx = 2:number_of_meshes
25     mesh(idx) = (mesh(idx-1) - 1)*2 + 1;
26 end
27
28 % Simulation
29 for idx = 1:number_of_meshes
30     nt = mesh(idx); % Points in temporal mesh
31     r = linspace(r0,r1,nr); % r axis
32     t = linspace(t0,t1,nt); % Time
33     theta0 = Gast*(1 - r.^2)/4 + Gast/(2*Bi); % Initial temperature
34
35     [tau,theta] = ode15s(@d2udx2,t,theta0); % Solution
36
37     index_vector = linspace(1, mesh(idx), mesh(1));
38     convergence_matrix(:, :, idx) = theta(index_vector, :);
39 end
40
41 % Error
42 error_matrix = diff(convergence_matrix, 1, 3);
43 maximum_error = reshape(max(error_matrix, [], [1 2]), ...
44     size(error_matrix, 3), 1);
45 %% Function
46
47 function ut = d2udx2(t,u)
48     % Problem parameters
49     r0 = 0.001;
50     r1 = 1;
51     Bi = 15;
52     Gast = 32.4;
53     nr = length(u);
54     r = linspace(r0,r1,nr);
55
56     % Partial derivative
57     dr = (r1 - r0)/(nr-1);
58     dr2 = dr^2;
59
60     ur = zeros(nr,1); % Preallocation
61     urr = zeros(nr,1); % Preallocation
62     for i = 2:(nr-1)
63         ur(i) = (u(i) - u(i-1))/dr;
64         urr(i) = (u(i+1) - 2*u(i) + u(i-1))/dr2;

```

```

65     end
66
67     % Boundary condition
68     ur(1) = (u(1) - u(2))/dr;
69     urr(1) = 2*(u(2) - u(1))/dr2;
70     ur(end) = (u(end) - u(end - 1))/dr;
71     urr(end) = 2*(u(end - 1) - (Bi*dr + 1)*u(end))/dr2;
72
73     % Partial differential equation
74     ut = zeros(nr,1);
75     Glin = Gast*t;
76     for i = 1:nr
77         ut(i) = (1/r(i))*ur(i) + urr(i) + Glin;
78     end
79
80 end

```

A.2 Convergência da Malha Espacial

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 %% Inputs
6
7 r0 = 0.001; % Beginning of the r axis
8 rl = 1;    % End of the r axis (Length L)
9 t0 = 0;    % Start time
10 t1 = 1.5; % End time
11 Bi = 15;  % Biot number
12 Gast = 32.4; % Heat source term
13
14 nt = 101; % Points in temporal mesh
15 number_of_meshes = 8; % Number of spatial meshes
16 mesh = zeros(number_of_meshes, 1); % Preallocation of the vector of ...
    the number of points in the spatial mesh
17
18 %% Calculations
19
20 % Initial Parameters

```

```

21 mesh(1) = 76; % ...
    Initial number of points in the spatial mesh
22 convergence_matrix = zeros(nt, mesh(1), number_of_meshes); % ...
    Convergence matrix
23
24 for idx = 2:number_of_meshes
25     mesh(idx) = (mesh(idx-1) - 1)*2 + 1;
26 end
27
28 % Simulation
29 for idx = 1:number_of_meshes
30     nr = mesh(idx); % Points in spatial mesh
31     r = linspace(r0,r1,nr); % r axis
32     t = linspace(t0,t1,nt); % Time
33     theta0 = Gast*(1 - r.^2)/4 + Gast/(2*Bi); % Initial temperature
34     [T,theta] = ode15s(@d2udx2,t,theta0); % Solution
35
36     index_vector = linspace(1, mesh(idx), mesh(1));
37     convergence_matrix(:, :, idx) = theta(:, index_vector);
38 end
39
40 % Error
41 error_matrix = diff(convergence_matrix, 1, 3);
42 maximum_error = reshape(max(error_matrix, [], [1 2]), ...
    size(error_matrix, 3), 1);
43
44 %% Function
45
46 function ut = d2udx2(t,u)
47     % Problem parameters
48     r0 = 0.001;
49     r1 = 1;
50     Bi = 15;
51     Gast = 32.4;
52     nr = length(u);
53     r = linspace(r0,r1,nr);
54
55     % Partial derivative
56     dr = (r1 - r0)/(nr-1);
57     dr2 = dr^2;
58
59     ur = zeros(nr,1); % Preallocation
60     urr = zeros(nr,1); % Preallocation

```

```

61     for i = 2:(nr-1)
62         ur(i) = (u(i) - u(i-1))/dr;
63         urr(i) = (u(i+1) - 2*u(i) + u(i-1))/dr2;
64     end
65
66     % Boundary condition
67     ur(1) = (u(1) - u(2))/dr;
68     urr(1) = 2*(u(2) - u(1))/dr2;
69     ur(end) = (u(end) - u(end - 1))/dr;
70     urr(end) = 2*(u(end - 1) - (Bi*dr + 1)*u(end))/dr2;
71
72     % Partial differential equation
73     ut = zeros(nr,1);
74     Glin = Gast*t;
75     for i = 1:nr
76         ut(i) = (1/r(i))*ur(i) + urr(i) + Glin;
77     end
78
79 end

```

A.3 Primeira Forma de Geração de Calor

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 %% Inputs
6
7 nr = 100;    % Points in spatial grid
8 nt = 100;    % Points in temporal grid
9 r0 = 0.001; % Beginning of the r axis
10 r1 = 1;     % End of the r axis (Length L)
11 t0 = 0;     % Start time
12 t1 = 1.5;   % End time
13 Bi = 15;    % Biot number
14 Gast = 32.4; % Heat source term
15
16 %% Calculations
17
18 r = linspace(r0,r1,nr); % r axis

```

```

19 t = linspace(t0,t1,nt); % Time
20 theta0 = Gast*(1 - r.^2)/4 + Gast/(2*Bi); % Initial temperature
21 [T,theta] = ode15s(@d2udx2,t,theta0); % Solution
22
23 %% Plots
24
25 [R,Y] = meshgrid(t,r);
26
27 figure
28 surf(R,Y,theta', 'EdgeColor', 'none')
29 xlabel('Time [s]')
30 ylabel('Radius')
31 zlabel('Temperature')
32
33 figure
34 surf(R,Y,theta', 'EdgeColor', 'none')
35 xlabel('Time [s]')
36 ylabel('Radius')
37 zlabel('Temperature')
38 view(0,90)
39 hcb = colorbar;
40 hcb.Title.String = "T";
41
42 vt = [0; 0.5; 1; 1.5];
43 v = zeros(length(vt),1);
44
45 for i = 1:length(vt)
46     v(i) = find(t == vt(i));
47 end
48
49 figure
50 plot(r,theta(v(1),:), r,theta(v(2),:), r,theta(v(3),:), ...
51     r,theta(v(4),:))
52 legend('t = 0', 't = 0.5', 't = 1', 't = 1.5')
53 xlabel('Radius')
54 ylabel('Temperature')
55 grid
56
57 %% Function
58 function ut = d2udx2(t,u)
59     % Problem parameters
60     r0 = 0.001;

```

```

61     r1 = 1;
62     Bi = 15;
63     Gast = 32.4;
64     nr = length(u);
65     r = linspace(r0,r1,nr);
66
67     % Partial derivative
68     dr = (r1 - r0)/(nr-1);
69     dr2 = dr^2;
70
71     ur = zeros(nr,1); % Preallocation
72     urr = zeros(nr,1); % Preallocation
73     for i = 2:(nr-1)
74         ur(i) = (u(i) - u(i-1))/dr;
75         urr(i) = (u(i+1) - 2*u(i) + u(i-1))/dr2;
76     end
77
78     % Boundary condition
79     ur(1) = (u(1) - u(2))/dr;
80     urr(1) = 2*(u(2) - u(1))/dr2;
81     ur(end) = (u(end) - u(end - 1))/dr;
82     urr(end) = 2*(u(end - 1) - (Bi*dr + 1)*u(end))/dr2;
83
84     % Partial differential equation
85     ut = zeros(nr,1);
86     Glin = Gast*t;
87     for i = 1:nr
88         ut(i) = (1/r(i))*ur(i) + urr(i) + Glin;
89     end
90
91 end

```

A.4 Segunda Forma de Geração de Calor

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 %% Inputs
6

```

```

7 nr = 100;      % Points in spatial grid
8 nt = 100;     % Points in temporal grid
9 r0 = 0.001;   % Beginning of the r axis
10 r1 = 1;      % End of the r axis (Length L)
11 t0 = 0;      % Start time
12 t1 = 0.5;    % End time
13 Bi = 15;     % Biot number
14 Gast = 32.4; % Heat source term
15
16 %% Calculations
17
18 r = linspace(r0,r1,nr);           % r axis
19 t = linspace(t0,t1,nt);         % Time
20 theta0 = Gast*(1 - r.^2)/4 + Gast/(2*Bi); % Initial temperature
21 [r,theta] = ode15s(@d2udx2,t,theta0); % Solution
22
23 %% Plots
24
25 [R,Y] = meshgrid(t,r);
26
27 figure
28 surf(R,Y,theta', 'EdgeColor', 'none')
29 xlabel('Time [s]')
30 ylabel('Radius')
31 zlabel('Temperature')
32
33 figure
34 surf(R,Y,theta', 'EdgeColor', 'none')
35 xlabel('Time [s]')
36 ylabel('Radius')
37 zlabel('Temperature')
38 view(0,90)
39 hcb = colorbar;
40 hcb.Title.String = "T";
41
42 vt = [0; 0.5; 1; 1.5];
43 v = zeros(length(vt),1);
44
45 for i = 1:length(vt)
46     v(i) = find(t == vt(i));
47 end
48
49 figure

```

```

50 plot(r,theta(v(1),:), r,theta(v(2),:), r,theta(v(3),:), ...
      r,theta(v(4),:))
51 legend('t = 0', 't = 0.5', 't = 1', 't = 1.5')
52 xlabel('Radius')
53 ylabel('Temperature')
54 grid
55
56 %% Function
57
58 function ut = d2udx2(t,u)
59     % Problem parameters
60     r0 = 0.001;
61     r1 = 1;
62     Bi = 15;
63     Gast = 32.4;
64     nr = length(u);
65     r = linspace(r0,r1,nr);
66
67     % Partial derivative
68     dr = (r1 - r0)/(nr-1);
69     dr2 = dr^2;
70
71     ur = zeros(nr,1); % Preallocation
72     urr = zeros(nr,1); % Preallocation
73     for i = 2:(nr-1)
74         ur(i) = (u(i) - u(i-1))/dr;
75         urr(i) = (u(i+1) - 2*u(i) + u(i-1))/dr2;
76     end
77
78     % Boundary condition
79     ur(1) = (u(1) - u(2))/dr;
80     urr(1) = 2*(u(2) - u(1))/dr2;
81     ur(end) = (u(end) - u(end - 1))/dr;
82     urr(end) = 2*(u(end - 1) - (Bi*dr + 1)*u(end))/dr2;
83
84     % Partial differential equation
85     ut = zeros(nr,1);
86     c3 = 4;
87     Glin = Gast*(r.^2)*exp(c3*t);
88
89     for i = 1:nr
90         ut(i) = (1/r(i))*ur(i) + urr(i) + Glin(i);
91     end

```

A.5 Terceira Forma de Geração de Calor

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 %% Inputs
6
7 nr = 100;    % Points in spatial grid
8 nt = 100;    % Points in temporal grid
9 r0 = 0.001; % Beginning of the r axis
10 r1 = 1;     % End of the r axis (Length L)
11 t0 = 0;     % Start time
12 t1 = 1.5;   % End time
13 Bi = 15;    % Biot number
14 Gast = 32.4; % Heat source term
15
16 %% Calculations
17
18 r = linspace(r0,r1,nr); % r axis
19 t = linspace(t0,t1,nt); % Time
20 theta0 = Gast*(1 - r.^2)/4 + Gast/(2*Bi); % Initial temperature
21 [T,theta] = ode15s(@d2udx2,t,theta0); % Solution
22
23 %% Plots
24
25 [R,Y] = meshgrid(t,r);
26
27 figure
28 surf(R,Y,theta', 'EdgeColor', 'none')
29 xlabel('Time [s]')
30 ylabel('Radius')
31 zlabel('Temperature')
32
33 figure
34 surf(R,Y,theta', 'EdgeColor', 'none')
35 xlabel('Time [s]')
36 ylabel('Radius')

```

```

37 xlabel('Temperature')
38 view(0,90)
39 hcb = colorbar;
40 hcb.Title.String = "T";
41
42 vt = [0; 0.5; 1; 1.5];
43 v = zeros(length(vt),1);
44
45 for i = 1:length(vt)
46     v(i) = find(t == vt(i));
47 end
48
49 figure
50 plot(r,theta(v(1),:), r,theta(v(2),:), r,theta(v(3),:), ...
      r,theta(v(4),:))
51 legend('t = 0', 't = 0.5', 't = 1', 't = 1.5')
52 xlabel('Radius')
53 ylabel('Temperature')
54 grid
55
56 %% Function
57
58 function ut = d2udx2(t,u)
59     % Problem parameters
60     r0 = 0.001;
61     r1 = 1;
62     Bi = 15;
63     Gast = 32.4;
64     nr = length(u);
65     r = linspace(r0,r1,nr);
66
67     % Partial derivative
68     dr = (r1 - r0)/(nr-1);
69     dr2 = dr^2;
70
71     ur = zeros(nr,1); % Preallocation
72     urr = zeros(nr,1); % Preallocation
73     for i = 2:(nr-1)
74         ur(i) = (u(i) - u(i-1))/dr;
75         urr(i) = (u(i+1) - 2*u(i) + u(i-1))/dr2;
76     end
77
78     % Boundary condition

```

```

79     ur(1) = (u(1) - u(2))/dr;
80     urr(1) = 2*(u(2) - u(1))/dr2;
81     ur(end) = (u(end) - u(end - 1))/dr;
82     urr(end) = 2*(u(end - 1) - (Bi*dr + 1)*u(end))/dr2;
83
84     % Partial differential equation
85     ut = zeros(nr,1);
86     c1 = 1;
87     Glin = Gast*(1 + c1*t);
88
89     for i = 1:nr
90         ut(i) = (1/r(i))*ur(i) + urr(i) + Glin;
91     end
92
93 end

```

A.6 Quarta Forma de Geração de Calor

```

1 clear
2 close all
3 clc
4
5 %% Inputs
6
7 nr = 100;    % Points in spatial grid
8 nt = 100;   % Points in temporal grid
9 r0 = 0.001; % Beginning of the r axis
10 r1 = 1;    % End of the r axis (Length L)
11 t0 = 0;    % Start time
12 t1 = 1.5;  % End time
13 Bi = 15;   % Biot number
14 Gast = 32.4; % Heat source term
15
16 %% Calculations
17
18 r = linspace(r0,r1,nr); % r axis
19 t = linspace(t0,t1,nt); % Time
20 theta0 = Gast*(1 - r.^2)/4 + Gast/(2*Bi); % Initial temperature
21 [-,theta] = ode15s(@d2udx2,t,theta0); % Solution
22

```

```

23 %% Plots
24
25 [R,Y] = meshgrid(t,r);
26
27 figure
28 surf(R,Y,theta', 'EdgeColor', 'none')
29 xlabel('Time [s]')
30 ylabel('Radius')
31 zlabel('Temperature')
32
33 figure
34 surf(R,Y,theta', 'EdgeColor', 'none')
35 xlabel('Time [s]')
36 ylabel('Radius')
37 zlabel('Temperature')
38 view(0,90)
39 hcb = colorbar;
40 hcb.Title.String = "T";
41
42 vt = [0; 0.5; 1; 1.5];
43 v = zeros(length(vt),1);
44
45 for i = 1:length(vt)
46     v(i) = find(t == vt(i));
47 end
48
49 figure
50 plot(r,theta(v(1),:), r,theta(v(2),:), r,theta(v(3),:), ...
51     r,theta(v(4),:))
52 legend('t = 0', 't = 0.5', 't = 1', 't = 1.5')
53 xlabel('Radius')
54 ylabel('Temperature')
55 grid
56
57 %% Function
58 function ut = d2udx2(t,u)
59     % Problem parameters
60     r0 = 0.001;
61     rl = 1;
62     Bi = 15;
63     Gast = 32.4;
64     nr = length(u);

```

```

65     r = linspace(r0,r1,nr);
66
67     % Partial derivative
68     dr = (r1 - r0)/(nr-1);
69     dr2 = dr^2;
70
71     ur = zeros(nr,1); % Preallocation
72     urr = zeros(nr,1); % Preallocation
73     for i = 2:(nr-1)
74         ur(i) = (u(i) - u(i-1))/dr;
75         urr(i) = (u(i+1) - 2*u(i) + u(i-1))/dr2;
76     end
77
78     % Boundary condition
79     ur(1) = (u(1) - u(2))/dr;
80     urr(1) = 2*(u(2) - u(1))/dr2;
81     ur(end) = (u(end) - u(end - 1))/dr;
82     urr(end) = 2*(u(end - 1) - (Bi*dr + 1)*u(end))/dr2;
83
84     % Partial differential equation
85     ut = zeros(nr,1);
86     c2 = 1;
87     c3 = 1;
88     Glin = Gast*(1 + c2*r.^2)*exp(c3*t);
89
90     for i = 1:nr
91         ut(i) = (1/r(i))*ur(i) + urr(i) + Glin(i);
92     end
93 end

```